原子は black hole ?

青野茂行　　金沢大学名誉教授

一般相対論とは

Newton 力学：平らな空間（第１法則）＋ potential（第２法則）

$\Downarrow$

歪んだ空間：Riemann space

Riemann space の距離、

$$ds^2 = g_{\nu\rho} du^\nu du^\rho, \quad u^\mu = u^\mu(\tau) \qquad g_{\mu\nu} \neq 0, \qquad |g_{\mu\mu}| \neq 1 \tag{1}$$

もし Minkowsky spase ならば

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.}(1, -1, -1, -1)$$

運動方程式

積分、

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(u, \dot{u}) d\tau \qquad u = u(\tau)$$

$$F(u, \dot{u}) = \sqrt{g_{\nu\rho}\dot{u}^\nu} \qquad \dot{u}^\nu = \frac{\partial u^\nu}{\partial \tau} \tag{2}$$

の optimization、すなわち Euler eq.

$$E_a = \frac{\partial F}{\partial u^a} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^a} = 0 \tag{3}$$

これから得られるカーブを **geodesic、世界線**という。

すこし計算を進めて.

$$\begin{aligned} E_a &= g_{a\rho}\frac{d^2u^k}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{a\nu}}{\partial u^\rho} + \frac{\partial g_{a\rho}}{\partial u^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial u^a}\right)\frac{du^\nu}{ds}\frac{du^\rho}{ds} \\ &= g_{a\rho}\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\mu\nu}\frac{du^\nu}{ds}\frac{du^\rho}{ds} = 0 \end{aligned}$$

そして運動方程式は[*] [†]

$$\frac{d^2u^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{du^\nu}{ds}\frac{du^\rho}{ds} = 0 \tag{4}$$

NOTE

1。曲がった空間では、一点ごとに基本ベクトルが変わる。これをつないでゆくのが、$\Gamma^\mu_{\nu\rho}$。

2。minimal な相互作用

$$\mathbf{p} \to \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$$

vector potential は外場による微分演算子の補正。これを導くのが gauge 場の理論。gauge 場の理論の結果は一般相対論の結果と酷似する。[‡] [§]

[*]矢野健太郎、接続の幾何学、（河出書店, 1947）

[†]A. M. Dirac, *General Theory of Relativity* , John Wiley, Sons, Inc (1975)

[‡]R. Utiyama, Phys. Rev. **101** (1956), 1597

[§]L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge, 1985　 John Wiley, Sons, Inc (1975)

3。自由粒子

$$\Gamma^i_{\nu\rho} = 0$$

すなわち

$$g_{\mu\nu,\rho} = 0 \qquad g_{\mu\nu} = constant$$

4。１次元調和振動子

eq.(4) から計算を進めて

$$-\frac{1}{2} g_{00,1} = \omega_0^2 (u^1)^2, \qquad (g^{11} = 1) \tag{5}$$

一方、通常の力学から

$$\ddot{u}^1 = -\omega_0^2 u^1. \tag{6}$$

上の二つを比べて

$$g_{00}(u^1) = 1 - \omega_0^2 (u^1)^2, \qquad g_{00} = 1 \tag{7}$$

すなわち $g_{00}(u^1)$ は potential の働きをする。scalar potential は時間方向の空間の歪みと解釈される。¶

Schwarzshild の世界

Schwarzshild は次のような空間を考えて、それを正確に解いた。

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{8}$$

未知の parameter $\lambda,\ \mu$ はる Einstein 方程式、空間の極率が無限縁で消える、と言う条件を使って決定できる。

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad r \to \infty$$

結果は

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{1}{1-(2a)/r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

ここで a は積分定数。

議論

質点が遠方から大きな質量を持つ物体に近づくことを想像する。$r = 2a$ が特異点であることが重要である。

１。第２項から、$r = 2a$ が近づける限界である。それを超えると g_{00} が負になる。第１項はそれ要する時間が無限大であることを示す。結合定数として、万有引力定数を想定すると black hale が現れる。

２。結合定数として、電荷 e を与えると、Schwarzshild 半径は Bohr 半径。

３。一般相対論では metric を仮定して（1s 型）、potential $1/r$ を導く。(g_{00} から)。

４。 量子論では potential, $1/r$ を認めて、$1s$ 波動関数、その他を導く。

¶P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, John Wiley, Sons, Inc (1975)