1E19

スピン渦理論

（京大院工）立花　明知

Quantum electron spin vorticity principle

(Kyoto Univ.) Akitomo TACHIBANA

【序】電子ストレステンソルの起源を Einstein の一般相対性理論に求め [1]、Einstein が発見した「時空の曲率が物体に働く重力を生み出す」、という測地線原理に加えて、「時空のねじれが電子スピンに働くトルクを生み出す」、という量子電子スピン渦原理を発見した[2] :

$$\varepsilon^{A\mu\nu} + \tau^{A\mu\nu}\left(g\right) = 0 \tag{1}$$

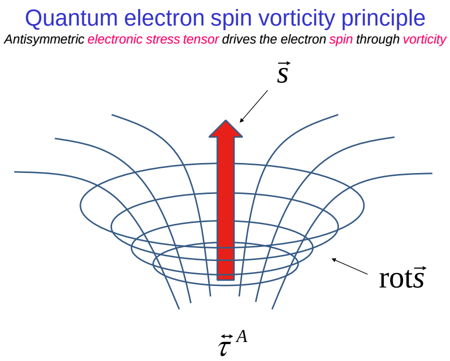

Fig. 1. Quantum electron spin vorticity principle.

本報告では、超重力から導かれるスピン渦とその計算例を相対論的量子力学の範囲で示す。

【理論】超重力ダイナミクスにおける量子電子スピン渦原理は単純超対称性のもとで

$$\varepsilon^{A\mu\nu}\left(\mathrm{SUGRA}\right) + \tau^{A\mu\nu}\left(\mathrm{SUGRA}\right) = 0 \tag{2}$$

となる。弱重力の極限を取れば、超カレントは

$$\Theta_{\mu} = \frac{i}{12}\sum_{n}\left(-4\hbar^{2}\left(\Phi_{n}{}^{\dagger}\partial_{\mu}\Phi_{n} - \Phi_{n}\partial_{\mu}\Phi_{n}{}^{\dagger}\right) - i\hbar\left(\left(\bar{D}\Phi_{n}{}^{\dagger}\right)\gamma_{\mu}\left(D\Phi_{n}\right)\right)\right)\times c \tag{3}$$

カイラル超場は

$$\begin{aligned}\Phi_{n} = \phi_{n} - \sqrt{2}\left(\bar{\theta}\frac{1+\gamma_{5}}{2}\psi_{n}\right) + \left(\bar{\theta}\frac{1+\gamma_{5}}{2}\theta\right)F_{n} - \frac{1}{2}i\hbar\left(\bar{\theta}\gamma_{5}\partial\!\!\!/\phi_{n}\theta\right)\\ + \frac{1}{\sqrt{2}}i\hbar\left(\bar{\theta}\gamma_{5}\theta\right)\left(\bar{\theta}\frac{1-\gamma_{5}}{2}\partial\!\!\!/\psi_{n}\right) + \frac{1}{8}\hbar^{2}\left(\bar{\theta}\gamma_{5}\theta\right)^{2}\Box\phi_{n}\end{aligned} \tag{4}$$

拡張ゲージ原理は

$$\Phi_{n}\left(x,\theta\right) \to \sum_{m}\left[\exp\left(i\sum_{A}t_{A}\Omega^{A}\left(x_{-}\right)\right)\right]_{nm}\Phi_{m}\left(x,\theta\right) \tag{5}$$

$$\Gamma\left(x,\theta\right) \to \exp\left(-i\sum_{A}t_{A}\Omega^{A}\left(x_{-}\right)\right)\Gamma\left(x,\theta\right)\exp\left(+i\sum_{A}t_{A}\Omega^{A\dagger}\left(x_{-}\right)\right) \tag{6}$$

将来的に超対称粒子の存在が確認されれば、超対称量子電子スピン渦原理が実証される[3]。

【考察】Eq. (2)において Minkowski 時空の極限をとれば、電子スピン $\vec{s}$ の時間発展は電子ストレステンソル $\vec{\tau}^{\Pi}$ の反対称成分 $\vec{\tau}^{A}$ のみによって導き出されることが示せる：

$$\vec{s}\left(t,\vec{r}\right) - \vec{s}\left(t_{0},\vec{r}\right) = 2\vec{r}\times\int_{t_{0}}^{t}\left(\int_{0}^{1}\mathrm{div}\,\vec{\tau}^{A}\left(t',\lambda\vec{r}\right)\lambda d\lambda\right)dt' \tag{7}$$

この時、電子スピン渦度 $\mathrm{rot}\vec{s}$ が重要な役割を演ずる。 $\mathrm{rot}\vec{s}$ は電子の運動量 $\vec{\Pi}$ を補いもする：

$$\nabla_\nu T^{\nu 0} = 0 \to \frac{\partial}{\partial t} cP^0 + c^2 \mathrm{div}\vec{P} = 0 \tag{8}$$

$$P^\mu = P_\mathrm{e}{}^\mu + P_\mathrm{EM}{}^\mu = \left(\frac{\frac{1}{2}(M + h.c.) + H_\gamma}{c},\ \vec{\Pi} + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{s} + \vec{G} \right) \tag{9}$$

$$P_\mathrm{e}{}^0 = \frac{\frac{1}{2}(M + h.c.)}{c},\quad \vec{P}_\mathrm{e} = \vec{\Pi} + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{s},\quad P_\mathrm{EM}{}^0 = \frac{H_\gamma}{c},\quad \vec{P}_\mathrm{EM} = \vec{G}$$

さらに、電子ストレステンソル $\vec{\vec{\tau}}^\Pi$ の対称成分 $\vec{\vec{\tau}}^S$ から、運動方程式が導かれる：

$$\nabla_\nu T^{\nu k} = 0 \to \frac{\partial}{\partial t}\vec{P} + \mathrm{div}\left(\vec{\vec{\sigma}} - \vec{\vec{\tau}}^S\right) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}_\mathrm{e} = \vec{L} + \vec{\tau}^S \tag{11}$$

同様にして、角運動量 $\vec{J}$ 保存則が導かれる：

$$\partial_\lambda M^{\lambda k \ell} = 0 \quad \to \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{J} + \mathrm{div}\left(\vec{r} \times \left(\vec{\vec{\sigma}} - \vec{\vec{\tau}}^S\right)\right) = 0 \tag{12}$$

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P} \tag{13}$$

ここに、$\vec{\vec{\sigma}}$ は Maxwell のストレステンソル、$\vec{\tau}^S = \mathrm{div}\vec{\vec{\tau}}^S$ は張力、$\vec{L}$ は Lorentz 力である。

【計算例】簡単のために、平面電磁場

$$A^\mu = A^\mu(\phi),\quad \phi = k \cdot x = k^0 ct - \vec{k} \bullet \vec{r},\quad \lim_{\phi \to \phi_\mathrm{inf}} A^\mu(\phi) = 0 \tag{14}$$

のもとで Dirac 電子がスピン第 3 固有値の漸近値 $\zeta = \pm\frac{1}{2}\hbar$ を持つとする。

さらに簡単のために

$$A^\mu = (0, A_x, 0, 0) \tag{15}$$

$$k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0) \tag{16}$$

と仮定すると、第 3 軸方向に運動する電子の電荷密度 j^0、スピン密度 $\vec{s}$、スピン渦度 $\mathrm{rot}\vec{s}$ は

$$N = \frac{1}{cq} j^0 = 1 + \frac{1}{2p^0(p^0 - p_z)}\left(\frac{q}{c}\right)^2 (A_x)^2 \tag{17}$$

$$\vec{s} = \pm\frac{1}{2}\hbar\left(\frac{1}{p^0}\frac{q}{c}A_x, 0, 1 - (N-1)\right) \tag{18}$$

$$\mathrm{rot}\vec{s} = \pm\frac{1}{2}\hbar\left(0, -\frac{k^0}{p^0}\frac{q}{c}\frac{dA_x}{d\phi}, 0\right) \tag{19}$$

で与えられる。

参考文献

[1] A. Tachibana, "General relativistic symmetry of electron spin torque," *Journal of Mathematical Chemistry* **50**, 669–688 (2012).

[2] A. Tachibana, "Electronic Stress with Spin Vorticity," In *Frontiers in Theoretical Chemistry: Concepts and Methods*, Taylor & Francis / CRC Press, Chap. **12**, pp. 235-251 (2013).

[3] A. Tachibana, to be published.