3E18

トンネル（Theory of Josephson Junction）

青野茂行 （金沢大学名誉教授
E-mail:aonosan2007@ybb.ne.jp

導体AとBを接合Tでつないで電圧 δ をかけたとき、常伝導状態なら δ に応じて電流が流れる（Ohm の法則）、しかし超伝導体の場合には、暫く電流は流れず、電圧が超伝導出現のための Gap 程度になると、delta 関数的に立ち上がる（R. P. Feynman, Feynman Physics, III,　Adison-Wesley, 1963、Statistical Mechanics, Benzamin）。Josephson Junction では位相が主体であるといわれる。これらを Linear Response Theory により調べる。

text には超伝導体のＧＬ (Ginzbur-Landau) 波動関数を

$$\psi(x) = \phi(x) e^{i\theta(x)} \tag{1}$$

として、振幅 ψ、位相 θ のそれぞれ space-time の挙動を追う。

理論としては、常伝導であっても超伝導伝導であっても、トンネル現象を同じ立場から取り扱うのが望ましい。そのために電子 Hamiltonian の検討から始める。電子は spinor である。それを表すためには２成分のベクトルが必要である。スカラ関数に $\alpha,\ \beta$ と足をつけて、それで電子波動関数とするのでは不十分である。南部 spinor を採用する。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_\uparrow \\ a_\downarrow^+ \end{pmatrix} \qquad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_\uparrow^+ & -b_\downarrow \end{pmatrix} \tag{2}$$

対応して

$$(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{b}}) = \begin{pmatrix} a_\uparrow b_\uparrow^+ & a_\uparrow b_\downarrow \\ a_\downarrow^+ b_\uparrow^+ & a_\downarrow b_\downarrow^+ \end{pmatrix} \qquad ([\mathbf{a}, \bar{\mathbf{b}}]^+) = \begin{pmatrix} \left[a_\uparrow, b_\uparrow^+\right]^+ & [b_\uparrow, a_\downarrow]^+ \\ \left[a_\downarrow^+, b_\uparrow^+\right]^+ & \left[b_\downarrow, a_\downarrow^+\right]^+ \end{pmatrix} = \mathbf{1} \tag{3}$$

この表示で電子 Hamiltonian は

$$\begin{aligned}
H^0 &= h^a_{rs} \mathbf{a}_r \sigma^a \bar{\mathbf{a}}_r \quad (a = \uparrow, \downarrow, +, -) \\
H^{int} &= T^a_{rs} \mathbf{a}_r \sigma^a \bar{\mathbf{a}}_r \\
H^{normal} &= (\mathbf{a}_r \sigma^a \bar{\mathbf{a}}_s)(\rho^a_{rs}; \rho^b_{tu}) < \mathbf{a}_t \sigma^b \bar{\mathbf{a}}_u > - (\mathbf{a}_r \sigma^a \bar{\mathbf{a}}_s)(\rho^a_{rs}; \rho^b_{ut}) < \mathbf{a}_t \sigma^b \bar{\mathbf{a}}_u > \\
H^{super} &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}_r \sigma^+ \bar{\mathbf{a}}_s)(\rho^+_{rs}; \rho^-_{tu}) < \mathbf{a}_t \sigma^- \bar{\mathbf{a}}_u > + (\mathbf{a}_r \sigma^- \bar{\mathbf{a}}_s)(\rho^-_{rs}; \rho^+_{tu}) < \mathbf{a}_t \sigma^+ \bar{\mathbf{a}}_u > \} \\
< \cdots > &= \mathrm{Tr} < \Phi | \cdots | \Phi >, \quad \Phi : \text{ground state}
\end{aligned} \tag{4}$$

２体相互作用については平均場近似を採っている。

導体Ｂにおける電流変化は

$$\begin{aligned}
\delta < I_B(t) > &= \delta < I_B(t) >^{ex} - < I_B(t) > \\
&= i < \Phi | \int_{t_0}^{t} dt' [H_I^{int}(t'), I_{B,I}(t)] | \Phi >
\end{aligned} \tag{5}$$

ただし相互作用表示は

$$I_{B,I}(t) = e^{iH^0 t} I_B(t) e^{-iH^0 t} \tag{6}$$

すなわち、観測量を H^0 だけ戻してみていることになる。

計算の手順：

1. 電流演算子、トンネル演算子を相互作用表示で表す。そのためにはそれらの運動方程式を利用する。
2. その結果は、retaded Green 関数、すなわち時間の step 関数をもつ交換関係となる。これは、因果 Green 関数の retaded 部分と同値である。
3. 因果 Green 関数、すなわち T 積 Green 関数を Wick の定理により、一体 Green 関数の積に分解する。
4. その最低次の ring diagram（polarization)Π を計算する。

以上は教科書に書いてある通り。教科書に書いてある以外のことを使う必要はない。

そこで、常伝道には eq.(3) の H^{normal} を、超伝導には H^{super} を使う。

結論：

1. 常伝導体では $\epsilon_B - \epsilon_A = \delta$ として
$$\frac{1}{\tau}\partial_\tau(\delta I) \to \frac{1}{\tau}\sin(\delta\tau) \to \delta \quad (\textbf{Ohm の法則}) \tag{7}$$
2. 超伝導体では、電圧ー電流の関係は
$$\sim \frac{1}{(\Delta_A - \Delta_B - \delta)(\Delta_B + \Delta_A - \delta)} \quad (\Delta_{A(B)} : \text{gap function}) \tag{8}$$
すなわち
$$\begin{aligned} \delta &= \Delta_A - \Delta_B \qquad \text{and} \\ \delta &= \Delta_A + \Delta_B \end{aligned}$$
で δ 関数的な立ち上がりは明らかになった。
3. 位相は？　text にあるように初めから位相関数を与えて、それの運動を論じるような事はする必要がない。しかし、超電流は junction を通過するとき、位相を spin 空間で、+(x) から-(y) へ変える。
4. London の主張、超電流 $\sim \mathbf{A}$ は改めて考えてみたい。